

Généralisation

→ on peut définir un ensemble de fonctions distance L_p :

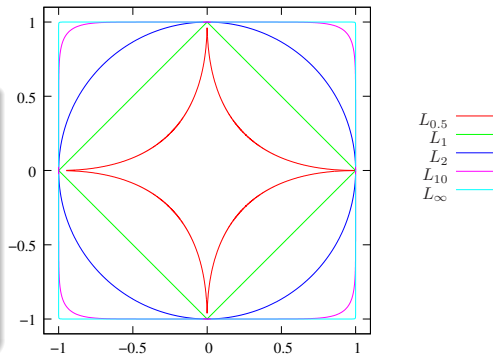
$$L_p(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

→ *norme de Manhattan*:

$p = 1$: $\|\mathbf{x}\|_1$

→ *norme euclidienne*:

$p = 2$: $\|\mathbf{x}\|_2$



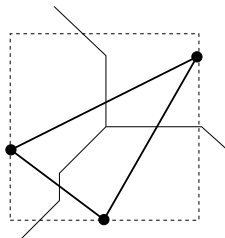
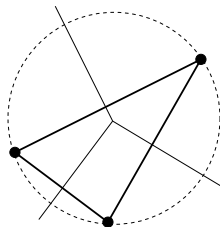
Isovaleurs $L_p = 1$ à partir de $\{0.0, 0.0\}$

Critère de la "sphère vide"

- cercle circonscrit \leftrightarrow carré circonscrit
- algorithme incrémental comme en norme L_2

Différences notables

- calcul du carré simplifié (seulement additions et comparaisons)
- pas d'erreurs dues aux calculs en flottants
- mais quelques cas particuliers

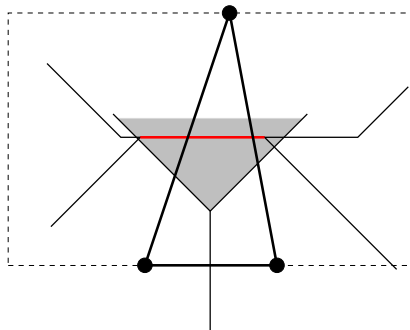


Cas particuliers

2 points possèdent une même coordonnée :
→ il n'y a pas un unique point équistant aux 3 sommets du triangle (trait rouge)

Solution

→ prendre un rectangle au lieu d'un carré.



Cas particuliers

Le critère de Delaunay ("sphère vide") n'est pas suffisant (Cas A ou B ?)

Optimalité de la triangulation de Delaunay

- Maximise l'angle minimal (Sibson, 1978)
- Maximise la moyenne des rayons des cercles inscrits (Lambert, 1994)
- Minimise la moyenne des rayons des cercles circonscrits (Musin, 1993, 1997)
- ...

Solution

- minimiser la somme des "rayons" des carrés.
- cas A !

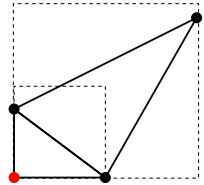


Figure: Cas A

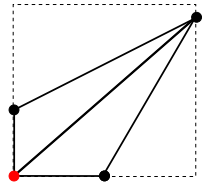


Figure: Cas B

Bissecteur de 2 sites

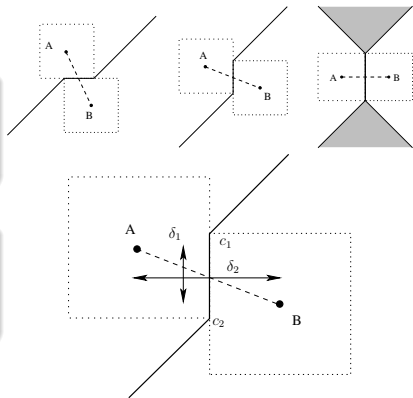
- ensemble des lieux à égale distance de 2 sommets
- est une ligne brisée : changement de max
→ sommets de Voronoï + points additionnels

Points additionnels

$\delta = \max(\delta_1, \delta_2)$ $c_1 = \{x_B - \delta/2, y_B + \delta/2\}$

$c_2 = \{x_A + \delta/2, y_A - \delta/2\}$

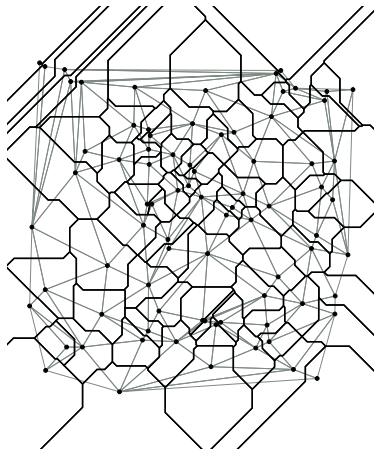
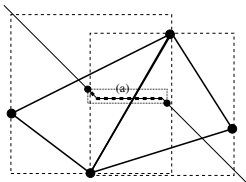
→ les signes changent en fonction de A and B



Algorithme

Etant donnée la triangulation de Delaunay:

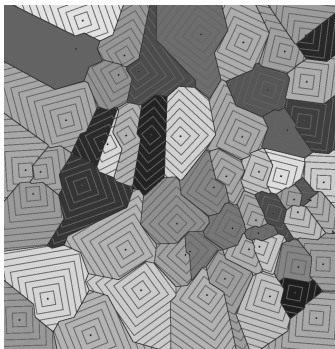
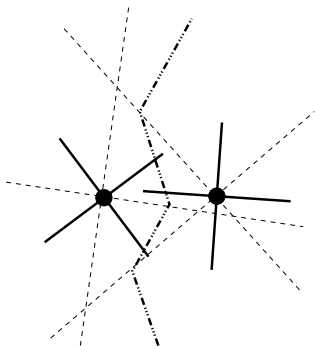
- calculer les bissecteurs de chaque arête de la triangulation
- limiter chaque bissecteur par les sommets de Voronoï
- construire chaque cellule de Voronoï en collectant les bissecteurs



Définition de la métrique

Norme L_∞ orientée : L_∞^θ

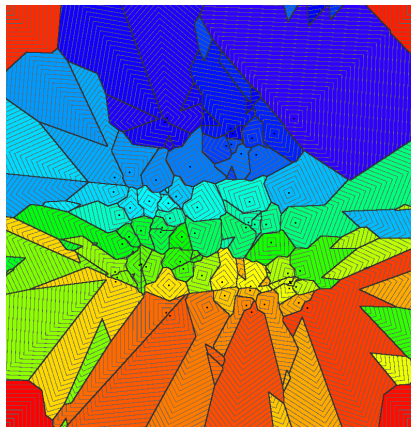
- Matrice d'orientation $(M)_p = \begin{pmatrix} \cos\theta_p & \sin\theta_p \\ -\sin\theta_p & \cos\theta_p \end{pmatrix}$
- $\|pq\|_\infty^p = \max_{i=1}^n |(M)_p(q_i - p_i)|$
- $\|pq\|_\infty^p \neq \|qp\|_\infty^q$
- $\text{Vor}(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|px\|_\infty^p \leq \|qx\|_\infty^q, \forall q \in S\}$.



Quelques caractéristiques

- les cellules de Voronoï sont non connexes
- 3 points n'ont pas un unique lieu d'équidistance
- 1 lieu d'équidistance \rightarrow 1 triangle
- une arête du graphe de connectivité (triangulation) partage plusieurs triangles
- graphe non planaire
- le dual du diagramme de Voronoï n'est pas une triangulation valide

\rightarrow Complexité importante

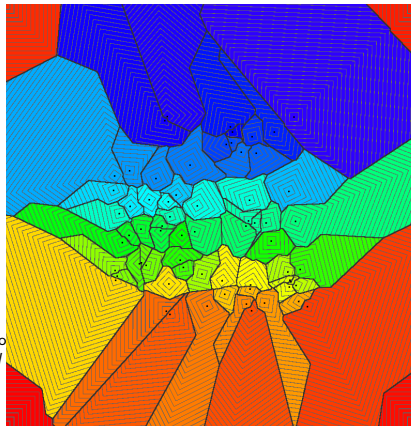


Solution : Diagramme simplifié

Inspiré de l'approche de Shewchuk^a

- suppression des parties non connexes des cellules
- analogie : la croissance de cristaux
- conserver seulement un unique lieu d'équidistance pour 3 points
→ graph de connectivité planaire

^aFrançois Labelle and Jonathan Richard Shewchuk. "Anisotropic mesh generation". In: *Symposium on Computational*



Solution : Diagramme simplifié

Inspiré de l'approche de Shewchuk^a

- suppression des parties non connexes des cellules
- analogie : la croissance de cristaux
- conserver seulement un unique lieu d'équidistance pour 3 points
→ graph de connectivité planaire

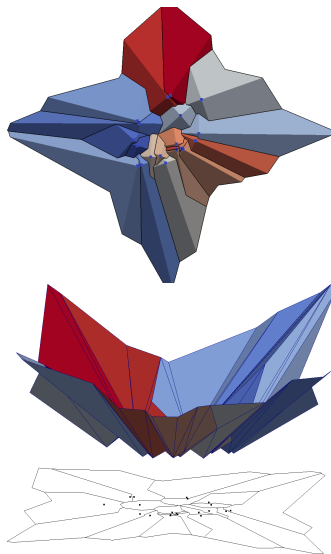
^aFrançois Labelle and Jonathan Richard Shewchuk. "Anisotropic voronoi diagrams and guaranteed-quality anisotropic mesh generation". In: *Symposium on Computational Geometry*. 2003, pp. 191–200.

crystal growth

Enveloppe inférieure

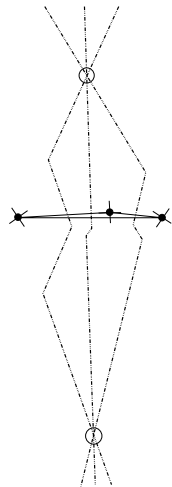
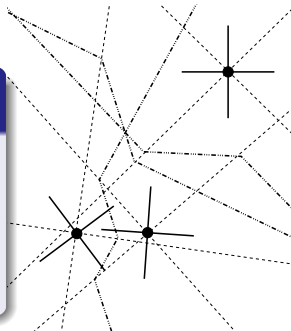
Autre façon de voir le diagramme :

- ensemble de pyramides à base carrée
- diagramme de Voronoï : projection des pyramides restreintes par leurs voisines sur un plan



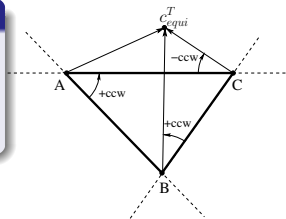
Centre d'équidistance c_{equi}^T d'un triangle $T(A, B, C)$

- Calcul des intersections des 3 bissecteurs.
- Tri par visibilité \rightarrow conserver les centres *visibles*.
- Tri par proximité \rightarrow conserver le plus proche.



Visibilité d'un centre

- Assure la conformité de la triangulation
- Centre valide \Rightarrow 2 *counterclockwise* tests positifs

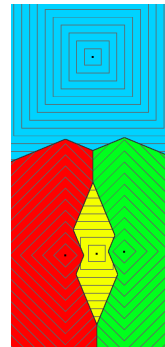


Insertion d'un nouveau point P

→ détermination du triangle initial $\mathbf{T}(A, B, C)$

Trouver \mathbf{T} tel que $\|Pc_{equi}^T\| < radius(\mathbf{T})$

- En L_2 , on cherche le triangle contenant le point à insérer
→ garantit que le nouveau point est plus proche du centre du cercle circonscrit.
- En L_∞^θ ceci n'est plus vrai.
→ il faut rechercher la cellule d'un point Q dans laquelle se trouve P , puis trouver \mathbf{T} adjacent à Q tel que
 $\|Pc_{equi}^T\|_\infty^P < \|Ac_{equi}^T\|_\infty^A$.
→ *insquare test*
- Si on ne trouve pas un tel triangle, alors P ne peut être inséré car la triangulation ne serait pas valide.
→ Cas particulier non encore traité.



Cas particulier

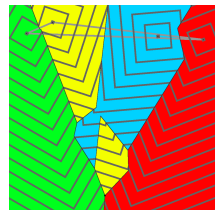
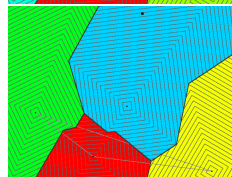
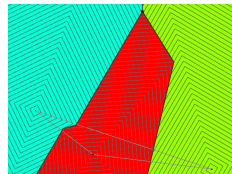
Insquare test

→ Test central de la méthode.

- Soit un triangle $\mathbf{T}(A, B, C)$ et son centre c_{equi}^T
→ diagramme de Voronoï à 3 points.
 c_{equi}^T = point triple du diagramme
- Est ce que l'insertion d'un point P dans le diagramme de Voronoï précédent recouvre c_{equi}^T ?

Problématique

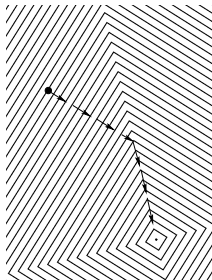
- Il n'est pas possible d'utiliser la notion de distance !
→ non connexité des cellules
- le centre c_{equi}^T n'est pas nécessairement contenu dans la cellule V_P de P
→ $c_{equi}^T \notin Vor(P/A) \cap Vor(P/B) \cap Vor(P/C)$



Notion de géodésique

→ chemin(s) le(s) plus court(s) entre deux points d'un espace pourvu d'une métrique.

- Une géodésique est en tout point orthogonale aux *lignes de niveau*
- Les lignes de niveau en norme L_∞^θ forment des carrés concentriques régulièrement espacés
- Arête de Delaunay = géodésique.

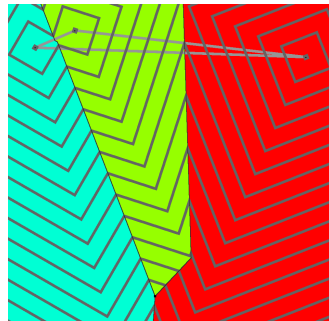


Insquare test

Revient à déterminer si la géodésique d'un des sommets du triangle vers c_{equi}^T a été interrompue par la cellule du point inséré

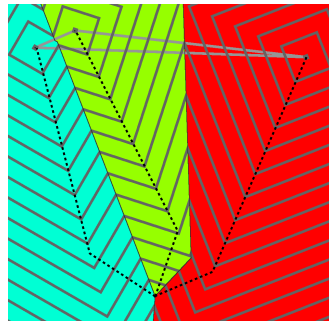
Insquare test

- soit le triangle initial, le diagramme de Voronoi de ses sommets et le centre c_{equi}^T .



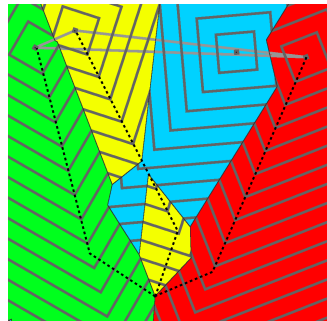
Insquare test

- soit le triangle initial, le diagramme de Voronoï de ses sommets et le centre c_{equi}^T .
- calculer les courbes géodésiques reliant les sommets du triangle vers c_{equi}^T .



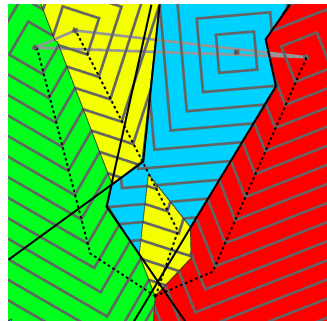
Insquare test

- soit le triangle initial, le diagramme de Voronoï de ses sommets et le centre c_{equi}^T .
- calculer les courbes géodésiques reliant les sommets du triangle vers c_{equi}^T .
- insérer le nouveau point P .



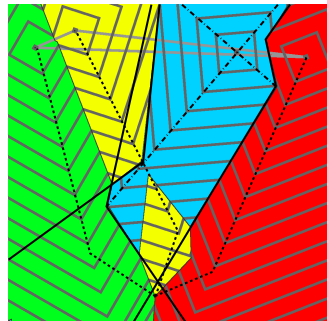
Insquare test

- soit le triangle initial, le diagramme de Voronoi de ses sommets et le centre c_{equi}^T .
- calculer les courbes géodésiques reliant les sommets du triangle vers c_{equi}^T .
- insérer le nouveau point P .
- calculer les bissecteurs $B_{P/A}$, $B_{P/B}$, $B_{P/C}$ entre les sommets du triangle et le point P .



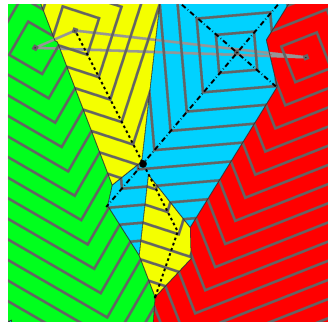
Insquare test

- soit le triangle initial, le diagramme de Voronoï de ses sommets et le centre c_{equi}^T .
- calculer les courbes géodésiques reliant les sommets du triangle vers c_{equi}^T .
- insérer le nouveau point P .
- calculer les bissecteurs $B_{P/A}$, $B_{P/B}$, $B_{P/C}$ entre les sommets du triangle et le point P .
- calculer la restriction des axes diagonaux des lignes de niveaux carrées du point P par les bissecteurs précédents.



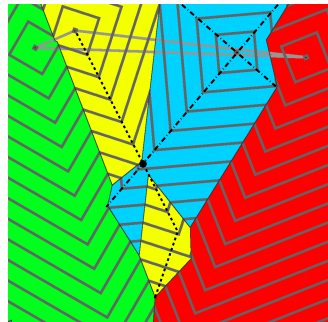
Insquare test

- soit le triangle initial, le diagramme de Voronoï de ses sommets et le centre c_{equi}^T .
- calculer les courbes géodésiques reliant les sommets du triangle vers c_{equi}^T .
- insérer le nouveau point P .
- calculer les bissecteurs $B_{P/A}$, $B_{P/B}$, $B_{P/C}$ entre les sommets du triangle et le point P .
- calculer la restriction des axes diagonaux des lignes de niveaux carrées du point P par les bissecteurs précédents.
- vérifier qu'aucun axe diagonal restreint n'intersecte une géodésique.



Insquare test

- soit le triangle initial, le diagramme de Voronoï de ses sommets et le centre c_{equi}^T .
- calculer les courbes géodésiques reliant les sommets du triangle vers c_{equi}^T .
- insérer le nouveau point P .
- calculer les bissecteurs $B_{P/A}$, $B_{P/B}$, $B_{P/C}$ entre les sommets du triangle et le point P .
- calculer la restriction des axes diagonaux des lignes de niveaux carrées du point P par les bissecteurs précédents.
- vérifier qu'aucun axe diagonal restreint n'intersecte une géodésique.
- dans le cas contraire, le triangle est à détruire.



Algorithme général

→ algorithme combiné Bowyer-Watson - Lawson

① étape Bowyer-Watson :

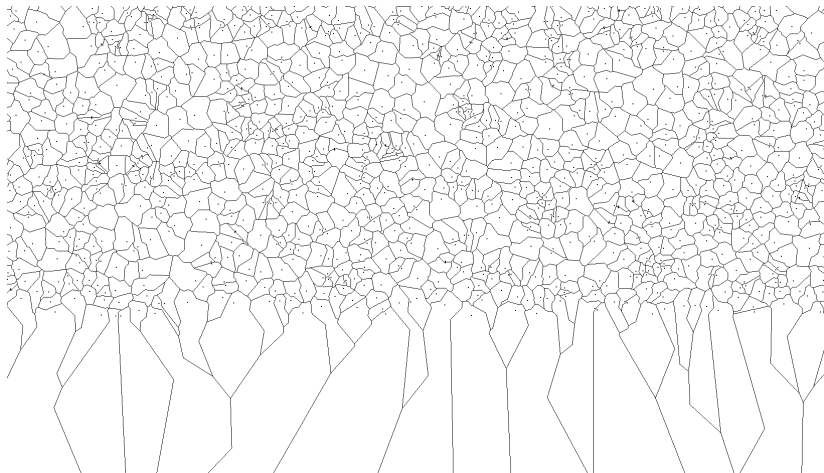
- création d'une cavité par propagation des triangles non valides au *insquare test*.
- des points précédemment insérés peuvent alors être supprimés (cas particulier de triangulation non valide).
- la cavité est ensuite étoilée.

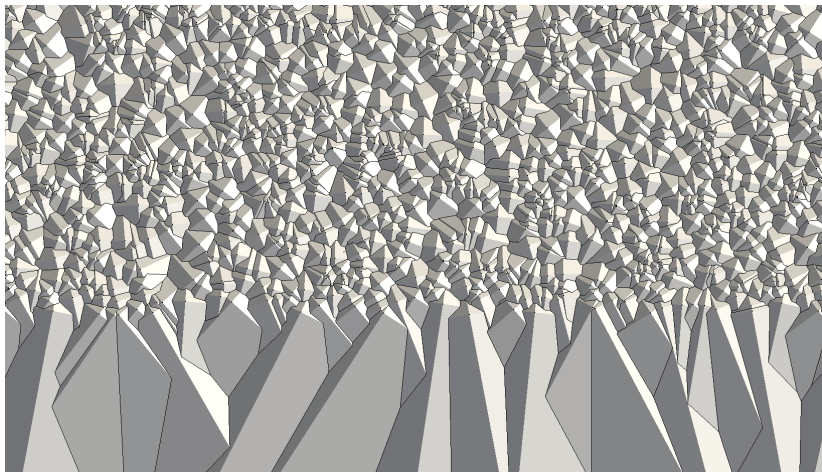
② étape Lawson :

- une première correction à base de bascules d'arêtes est effectuée sur les éléments adjacents au point inséré.
- une seconde correction est ensuite effectuée au voisinage de l'anneau d'éléments adjacents à P .

Dualisation triangulation de Delaunay → diagramme de Voronoï

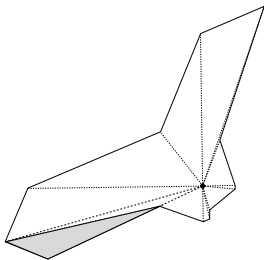
Identique à la méthode utilisée pour la norme L_∞





Itération de Lloyd

- Découpage des cellules de Voronoi en triangles.
- Calcul des centroïdes par intégration en norme L_2 sur chacun des triangles.
- Déplacement des centres des cellules vers les centroïdes.



Découpage de cellule

Angle définit par le centre du carré

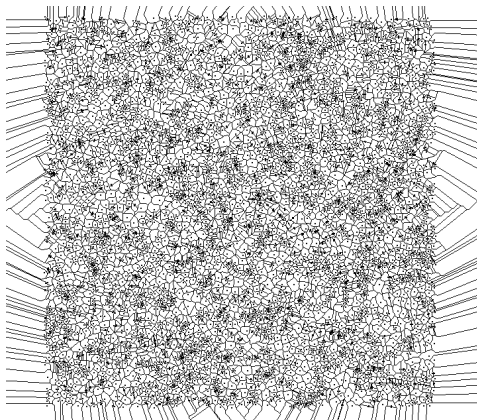
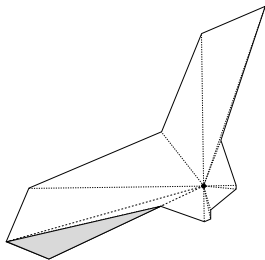


Diagramme initial

Itération de Lloyd

- Découpage des cellules de Voronoï en triangles.
- Calcul des centroïdes par intégration en norme L_2 sur chacun des triangles.
- Déplacement des centres des cellules vers les centroïdes.



Découpage de cellule

Angle définit par le centre du carré

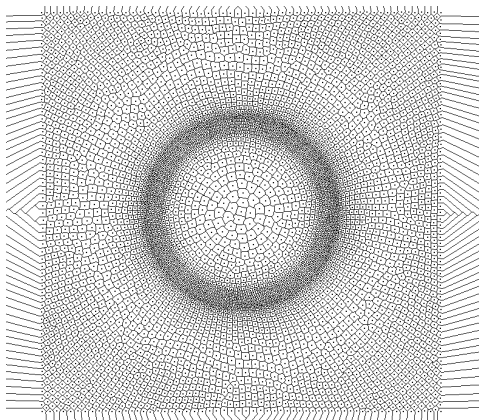
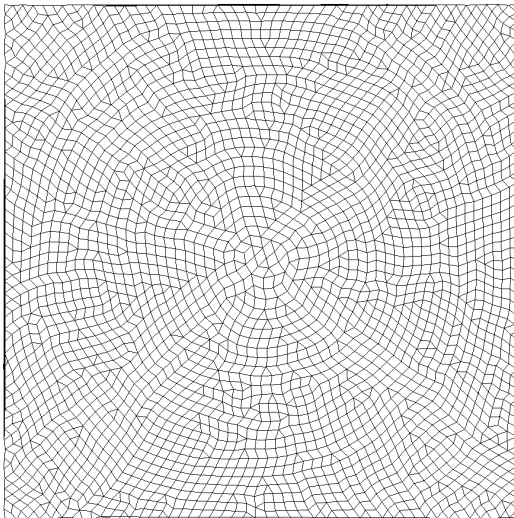
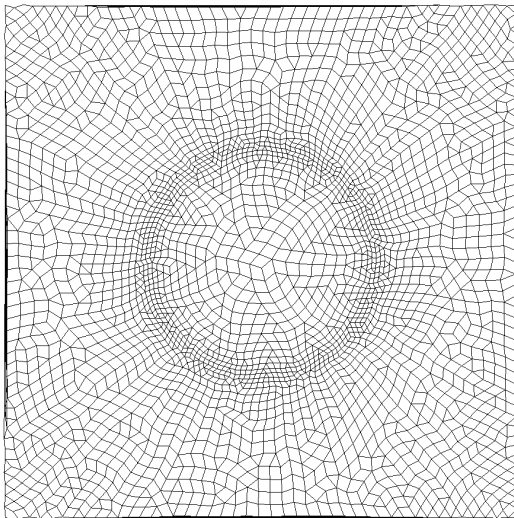


Diagramme final

Lloyd iteration



Avec taille constante



Avec taille variable

Problèmes subsistants

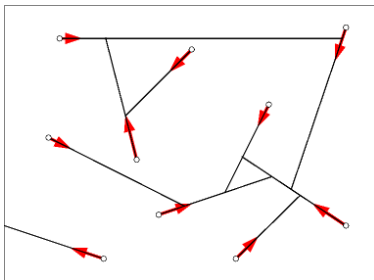
- Robustesse de la méthode
- Extension aux diagrammes de Voronoi généralisés
→ **nécessité d'avoir un graph dual topologiquement équivalent à une triangulation**

Solution

- Conserver la notion de croissance de cristaux.
- Algorithme à événements similaire à la "sweepline" de S.Fortune.
- Basé sur la propagation d'une *onde* générée en chaque point.
- Inspiré des *motorcycle graphs*.

Définition du problème (Crashing Motorcycles Efficiently by Jeff Erickson)

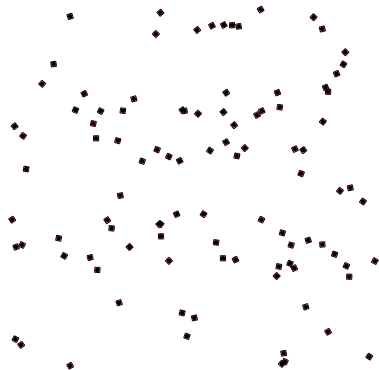
Imagine several people riding motorcycles out in the desert. The bikes are extremely fragile; if any motorcycle runs over the track previously left by another bike, it immediately crashes. If two bikes reach the same point simultaneously, they both crash. Fans of cheesy science fiction movies will recall the movie TRON, in which "Light Cycles" drove around an arena, leaving walls behind them. If a light cycle ran into a wall, it would "derez" and its wall would disappear. In our scenario, even after a cycle derezzes, its wall stays up.)



Motorcycle graph

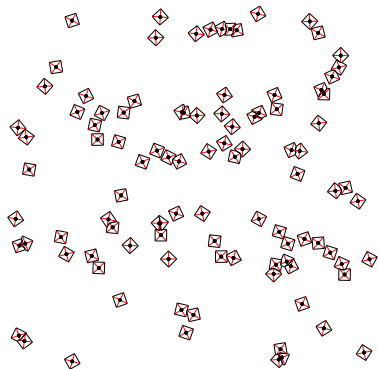
Quelques changements

- Les motos sont remplacées par des droites.
- Elles peuvent également rencontrer des plans ou des murs.



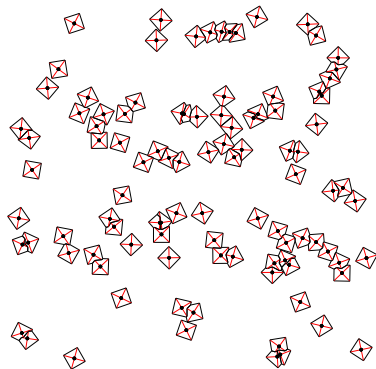
Quelques changements

- Les motos sont remplacées par des droites.
- Elles peuvent également rencontrer des plans ou des murs.



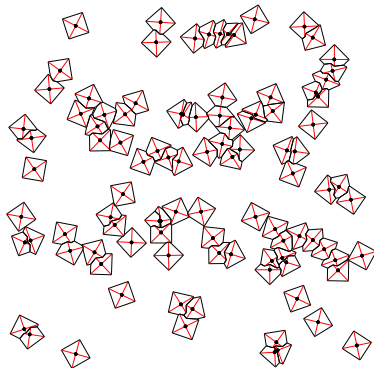
Quelques changements

- Les motos sont remplacées par des droites.
- Elles peuvent également rencontrer des plans ou des murs.



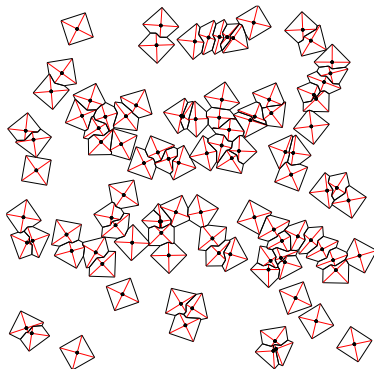
Quelques changements

- Les motos sont remplacées par des droites.
- Elles peuvent également rencontrer des plans ou des murs.



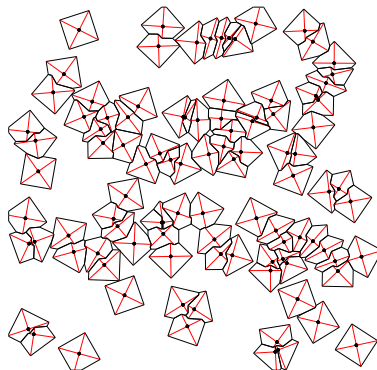
Quelques changements

- Les motos sont remplacées par des droites.
- Elles peuvent également rencontrer des plans ou des murs.



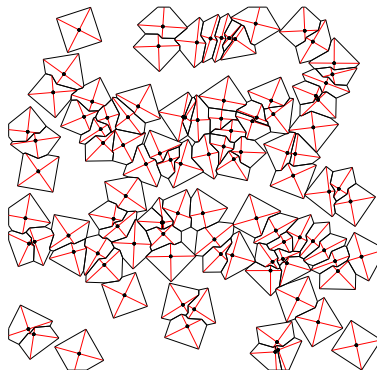
Quelques changements

- Les motos sont remplacées par des droites.
- Elles peuvent également rencontrer des plans ou des murs.



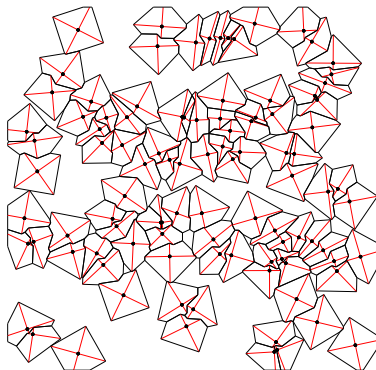
Quelques changements

- Les motos sont remplacées par des droites.
- Elles peuvent également rencontrer des plans ou des murs.



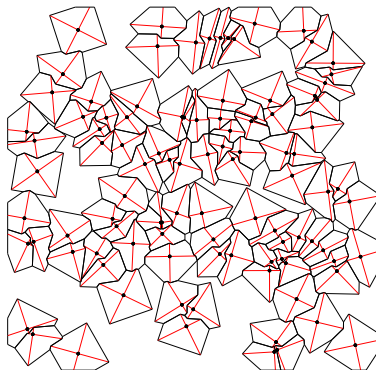
Quelques changements

- Les motos sont remplacées par des droites.
- Elles peuvent également rencontrer des plans ou des murs.



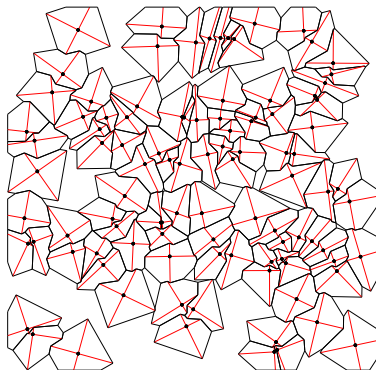
Quelques changements

- Les motos sont remplacées par des droites.
- Elles peuvent également rencontrer des plans ou des murs.



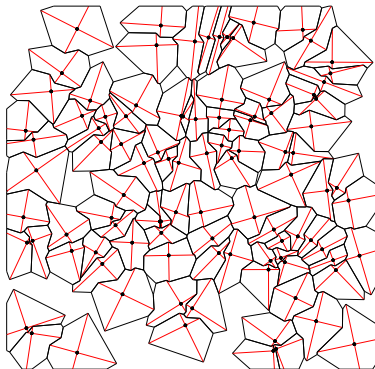
Quelques changements

- Les motos sont remplacées par des droites.
- Elles peuvent également rencontrer des plans ou des murs.



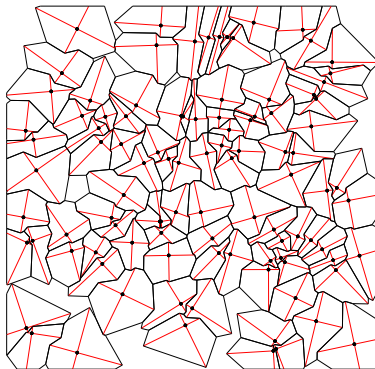
Quelques changements

- Les motos sont remplacées par des droites.
- Elles peuvent également rencontrer des plans ou des murs.



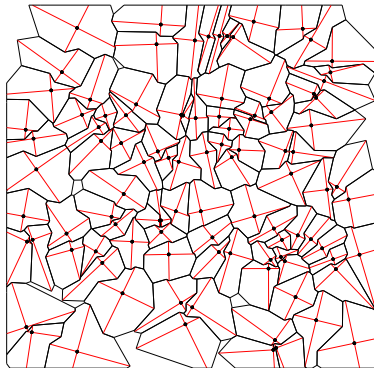
Quelques changements

- Les motos sont remplacées par des droites.
- Elles peuvent également rencontrer des plans ou des murs.



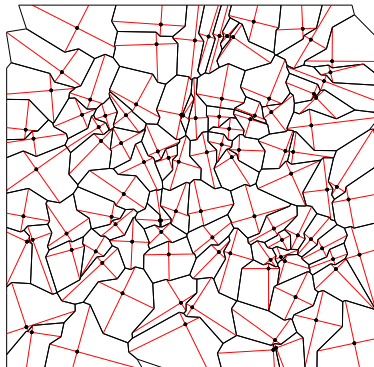
Quelques changements

- Les motos sont remplacées par des droites.
- Elles peuvent également rencontrer des plans ou des murs.



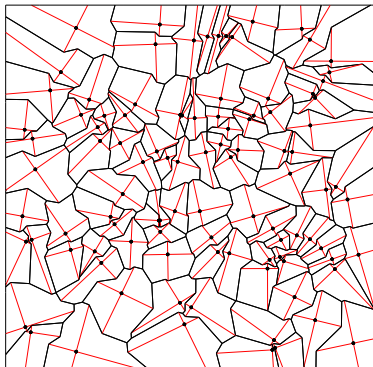
Quelques changements

- Les motos sont remplacées par des droites.
- Elles peuvent également rencontrer des plans ou des murs.



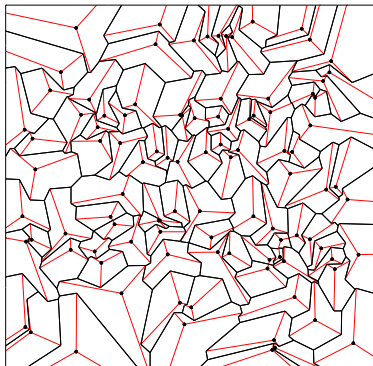
Quelques changements

- Les motos sont remplacées par des droites.
- Elles peuvent également rencontrer des plans ou des murs.



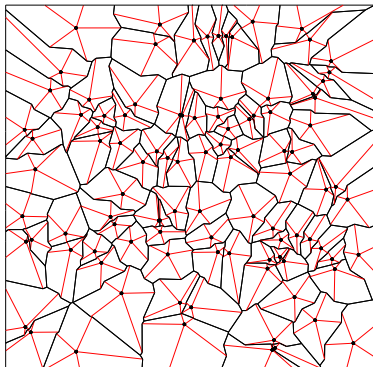
Pourquoi se restreindre ?

- Extension à toutes normes polygonales.
- Extension aux diagrammes à poids additifs ou multiplicatifs.
- Génération de diagrammes de Voronoi généralisés.



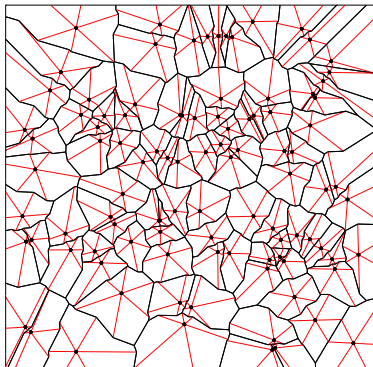
Pourquoi se restreindre ?

- Extension à toutes normes polygonales.
- Extension aux diagrammes à poids additifs ou multiplicatifs.
- Génération de diagrammes de Voronoi généralisés.



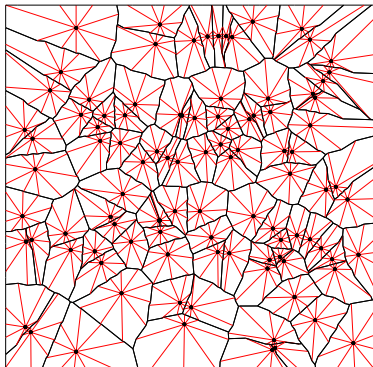
Pourquoi se restreindre ?

- Extension à toutes normes polygonales.
- Extension aux diagrammes à poids additifs ou multiplicatifs.
- Génération de diagrammes de Voronoi généralisés.



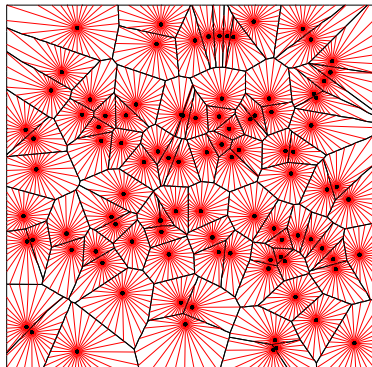
Pourquoi se restreindre ?

- Extension à toutes normes polygonales.
- Extension aux diagrammes à poids additifs ou multiplicatifs.
- Génération de diagrammes de Voronoi généralisés.



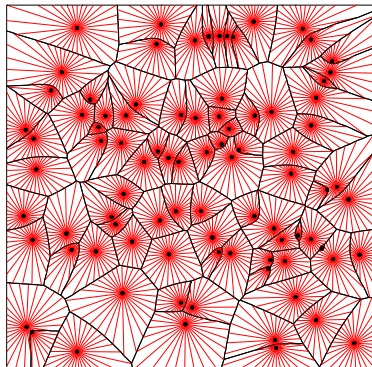
Pourquoi se restreindre ?

- Extension à toutes normes polygonales.
- Extension aux diagrammes à poids additifs ou multiplicatifs.
- Génération de diagrammes de Voronoi généralisés.



Pourquoi se restreindre ?

- Extension à toutes normes polygonales.
- Extension aux diagrammes à poids additifs ou multiplicatifs.
- Génération de diagrammes de Voronoi généralisés.



Pourquoi se restreindre ?

- Extension à toutes normes polygonales.
- Extension aux diagrammes à poids additifs ou multiplicatifs.
- Génération de diagrammes de Voronoi généralisés.

